ENSA-ALHOCEIMA CP II.	ANALYSE 4 SEMESTRE 2 F.MORADI

Exercice 7 :

Comme f est une fonction continue sur $[a,b]$*, alors*

$\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2: \quad f([a,b]) = [m,M]$.

Par suite, $\forall x \in [a,b]: \quad m \leq f(x) \leq M$.

Or, g est une fonction positive donc

$$\forall x \in [a,b]: \quad mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

Par passage à l'intégral, on trouve:

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

Si $\boldsymbol{\int_a^b g(x)dx = 0}$, *alors d'après ce qui précède,* $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

D'où la formule $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$

est valable pour tout $c\epsilon[a,b]$.

Si $\boldsymbol{\int_a^b g(x)dx \neq 0,}$ *alors*

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

Ce qui entraine que

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \in [m,M] = f([a,b])$$

Finalement,

$$\boldsymbol{\exists c\epsilon[a,b]: \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(c)}$$

D'où le résultat.

Exercice 8 :

On a:

$\left|\int_{-1}^1 (f(x)+x^2f(-x))dx\right| \leq \int_{-1}^1 |f(x)+x^2f(-x)|dx \leq \int_{-1}^1 |f(x)|dx + \int_{-1}^1 x^2|f(-x)|dx \leq \int_{-1}^1 Mdx + \int_{-1}^1 Mx^2dx.$

Car $M = sup_{x\in[-1.1]}|f(x)| = sup_{x\in[-1.1]}|f(-x)|$.

Par suite,

$$\left|\int_{-1}^{1}\left(f(x)+x^2f(-x)\right)dx\right| \leq \frac{8}{3}M$$

Exercice 9 :

1-Comme $\left(\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)(\forall u \in [0,+\infty[)$: $u\sin x \geq 0$, *alors*

$0 \leq 1-e^{-u\sin x} \leq u\sin x.$

Par suite, $1-u\sin x \leq e^{-u\sin x} \leq 1$.

En intégrant de 0 et $\frac{\pi}{2}$, *on obtient:*

$\frac{\pi}{2}+[u\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u\sin x}dx \leq \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2}-u \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u\sin x}dx \leq \frac{\pi}{2}.$

Par passage à la limite, on trouve:

$$\lim_{u\to 0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u\sin x}dx = \frac{\pi}{2}$$

2- Montrons que: $\lim_{u\to 0^+}\int_u^{3u}\frac{\cos x}{x}dx = \ln 3$.

Comme $u \to 0^+$, *on peut prendre* $u \in \left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ *de telle sorte que* $[u,3u]$ *soit inclus dans* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Or, la fonction: $x \longmapsto \cos x$ *est décroissante sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, *d'où:*

$\left(\forall u \in \left]0,\frac{\pi}{6}\right]\right)(\forall x \in [u,3u])$: $\cos(3u) \leq \cos x \leq \cos u.$

Par suite, $\left(\forall u \in \left]0,\frac{\pi}{6}\right]\right)(\forall x \in [u,3u])$: $\frac{\cos(3u)}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{\cos u}{x}$.

Par passage à l'intégral, on obtient:

$$\cos(3u)\int_u^{3u}\frac{dx}{x} \leq \int_u^{3u}\frac{\cos x}{x}dx \leq \cos u\int_u^{3u}\frac{dx}{x}$$

Ce qui est équivalent à: $\ln 3.\cos(3u) \leq \int_u^{3u}\frac{\cos x}{x}dx \leq \ln 3.\cos u$.

Comme $\lim_{u\to 0^+}\left(\ln 3.\cos(3u)\right) = \lim_{u\to 0^+}(\ln 3.\cos u) = \ln 3$, *et d'après le théorème d'encadrement des limites, on déduit que:*

$$\lim_{u\to 0^+}\int_u^{3u}\frac{\cos x}{x}dx = \ln 3$$

3- soit $C = \lim_{u\to+\infty}\int_0^{\pi} e^{-u\sin x}dx$

a- D'après la relation de Chales on a :

$\int_0^{\pi} e^{-u\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u\sin x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-u\sin x}dx.$

En utilisant le changement de variables $t = \pi - x$, *pour la deuxième intégrale, on obtient:* $dt = -dx$ *et* $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$

Et par suite,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-u\sin x}dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-u\sin(\pi-t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u\sin t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u\sin x}dx$$

D'où, $\boldsymbol{\int_0^{\pi} e^{-u\sin x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u\sin x}dx}.$

b- Posons : $g(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi} \quad pour \quad x\epsilon\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$

La fonction g est de classe C^{∞} *sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *. Ses dérivées première et deuxième sont définies respectivement par:*

$$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} \quad et \quad g''(x) = -\sin x$$

Il est clair que: $\forall x\epsilon\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad g''(x) \leq 0$. *D'où le tableau de variation suivant,*

Avec $\alpha = Arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$

x	*0* $\qquad$ α	$\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$	$-$	$-$
$g'(x)$	$1-\frac{2}{\pi} \searrow 0$	$\searrow -\frac{2}{\pi}$
$g'(x)$	$+$	$-$
$g(x)$	*0* $\nearrow g(\alpha)$	$\searrow$

Comme, $g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, *alors d'après le tableau ci dessus, g est positive sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. *D'où:* $\quad \boldsymbol{\forall x\epsilon\left[0,\frac{\pi}{2}\right]: \sin x \geq \frac{2x}{\pi}}.$

c- D'après ce qui précède et grâce à la croissance de la fonction Exponentielle, on déduit que:

$$\left(\forall x \epsilon \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) (\forall u \in]0, +\infty[): \quad e^{-usinx} \leq e^{-\frac{2u}{\pi}x}$$

Et par passage à l'intégration, on aboutit à:

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-usinx} dx \quad \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2u}{\pi}x} dx = \left[-\frac{\pi}{2u} e^{-\frac{2u}{\pi}x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2u}(e^{-u} - 1).$$

Puisque, $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\pi}{2u}(e^{-u} - 1) = 0$, *alors d'après le théorème d'encadrement des limites,* $\lim\limits_{u\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2u}{\pi}x} dx = 0$.

Et par suite, $\boldsymbol{C = \lim_{u\to+\infty} \int_0^{\pi} e^{-u\sin x} dx = 0}$.

4-Soit $u > 0 \quad et \quad 0 \leq x \leq u$.

En multipliant par x qui est positif, on obtient l'encadrement suivant:

$0 \leq x^2 \leq xu$.

Grâce à la croissance de l'Exponentielle et par passage à l'intégrale, on aboutit à: $\int_0^u dx \leq \int_0^u e^{x^2} dx \leq \int_0^u e^{xu} dx \quad \Leftrightarrow \quad u \leq \int_0^u e^{x^2} dx \leq \frac{e^{u^2}-1}{u}$.

D'où,

$$ue^{-u^2} \leq e^{-u^2} \int_0^u e^{x^2} dx \leq \frac{1 - e^{-u^2}}{u}$$

Comme $\lim\limits_{u\to+\infty} ue^{-u^2} = \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{1-e^{-u^2}}{u} = 0$ *et d'après le théorème d'encadrement des limites, on déduit que:*

$$\boldsymbol{D = \lim_{u\to+\infty} e^{-u^2} \int_0^u e^{x^2} dx = 0}$$